Программа дисциплины

«Математический анализ»

факультет бизнес-информатики

(второй уровень высшего профессионального образования – бакалавриат)

1. Пояснительная записка

Автор программы: д.ф.-м.н., профессор А.А.Быков.

Требования к студентам:

Учебная дисциплина "Математический анализ" (1-4-й модули) использует материал школьной программы по математике, а также же некоторые разделы курса "Линейная алгебра".

Аннотация:

Математические методы находят все более широкое применение в современной практике анализа, прогноза и планирования деятельности государственных предприятий, банковских структур, крупных, средних и мелких фирм. В этой связи в программу обучения студентов, специализирующихся в области экономики и менеджмента, входит изучение методов построения и исследования корректных математических моделей процессов, развивающихся в сложной системе взаимодействующих объектов. Различные аспекты этой темы рассматриваются в общих курсах математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений, математической статистики, эконометрики, а также в специальных курсах математических дисциплин. В основе всех этих разделов высшей математики лежит ***математический анализ,*** содержание которого составляют ***дифференциальное и интегральное исчисления*** функций одной и нескольких переменных, в том числе теория кратных и несобственных интегралов, теория числовых рядов, элементы теории интегралов, зависящих от параметра и функциональных рядов. Основное внимание уделяется изучению фундаментальных понятий: предела, производной, интеграла, зависимости и независимости функций, экстремума. Подробно рассматриваются числовые последовательности и ряды, так как именно эти математические объекты адекватно описывают многие процессы экономики, имеющие по своей природе дискретный характер. Особенность программы ВШЭ-ГУ в том, что она в первую очередь направлена на развитие навыков применения методов математического анализа для решения прикладных задач. Вместе с тем, значительное место в курсе математики занимают теоретические вопросы, связанные с логикой определения основных понятий и доказательствами основных утверждений. Большое внимание уделяется формулировкам прямых и обратных теорем, прямым доказательствам и доказательствам от противного. Одним из основных методов изложения курса является формулирование определения некоторого понятия и построение отрицания этого определения, т.е. определения объекта, не обладающего заданным свойством. Это развивает умение логически мыслить и четко формулировать цели проводимого исследования свойств некоторого объекта, позволяет научиться избегать ошибок, связанных с неверным пониманием всего многообразия взаимоотношений между различными компонентами исследуемого объекта. Для небольшого числа основных теорем даются подробные доказательства, утверждения, носящие вспомогательный характер, даются, как правило, без доказательства. Некоторые (в том числе и важные) достаточно простые теоремы формулируются в виде задач и оставляются для самостоятельного решения. Теоретический курс дополняется практическими занятиями в аудитории, на которых студенты решают задачи по всем разделам курса. Основные темы аудиторных занятий - исследование существования и вычисление пределов последовательностей и функций, дифференцирование и интегрирование, построение графиков, исследование экстремумов, приближенное вычисление значений сложных функций с использованием формулы Тейлора, преобразования и вычисления с использованием компьютера, калькулятора, на бумаге и в уме. Данный документ содержит подробную программу курса. Каждый студент обязан полностью проработать всю программу, включая и вопросы, оставленные для самостоятельной работы. Со всеми возникающими при этом проблемами следует обращаться к лектору и к преподавателю, ведущему практические занятия. Курс математического анализа рассчитан на четыре модуля. В каждом модуле проводятся тесты, на которых проверяется знание теоретического материала и умение решать задачи. Итоговая оценка по курсу включает в себя результаты тестов и устного собеседования.

Программа дисциплины содержит исторические сведения о развитии математики, математические основы и математические методы, формирующие у студентов математическое мышление, необходимое для успешной исследовательской и аналитической работы в современных областях социально-экономического анализа. Задачей курса является ознакомление студентов с методологией математического подхода к анализу экономических процессов. В отличие от одноименных учебных дисциплин на других факультетах, на факультете Экономики курс математического анализа направлен на повышение общего интеллектуального уровня студентов, развитие способности и умения рассуждать, доказывать, опровергать, подвергать логическому анализу сложные конкретные и абстрактные обьекты в из взаимосвязи и взаимозависимости. Вместе с тем, курс математического анализа призван снабдить студентов знаниями, навыками и способностями, необходимыми для успешного освоения последующих курсов, в первую очередь, курса методов оптимальных решений, теории вероятностей и математической статистики.. Данный аспект обусловлен объективным наличием на факультете Экономики широкого спектра соответствующих специальных прикладных дисциплин из областей эконометрики, экономической статистики, финансовой и страховой математики, оценки и управления. Именно в таких и подобных им областях и учебных дисциплинах находит свое конкретное применение материал курса "Математический анализ".

Учебная задача курса:

В настоящее время курс высшей математики занимает достойное место в программах всех без исключения ведущих высших учебных заведений в России и за рубежом. Математические дисциплины входят в состав необходимого образовательного минимума каждого интеллигентного гражданина.

Материал курса «Математический анализ» предназначен в первую очередь для развития навыков логического мышления, рассуждения, доказательства, проверки гипотез, обоснования, опровержения. Основные понятия, идеи, методы математического анализа необходимы в реальной деловой практике. Они используются также в учебных дисциплинах «Методы оптимальных решений», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Математическая экономика», «Информатика».

Форма отчетности:

Контрольные работы в конце каждого модуля, зачет и экзамен в конце соответственно второго и четвертого модулей первого курса, экзамен в конце второго модуля второго курса.

A. Функции одной переменной

I. Элементы теории множеств и функций.

Понятие множества. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение, симметрическая разность. Подмножества. Бинарные отношения, включение множеств. Конечные и бесконечные, счетные и несчетные множества. Взаимно - однозначное соответствие элементов множеств. Понятие отображения (функции). Область определения, множество значений. Обратимое отображение, обратное отображение. Композиция отображений. Примеры отображений: скалярные и векторные функции одной и нескольких переменных, отображения точечных множеств, булевские функции. Геометрическая интерпретация отображений.

II. Понятие вещественного числа.

Рациональные числа. Правила сравнения, сложения и умножения рациональных чисел. Представление рационального числа в виде бесконечной периодической дроби. Иррациональные числа как бесконечные непериодические дроби. Вещественные (действительные) числа. Правило сравнения вещественных чисел. Приближение вещественного числа рациональными числами с произвольной точностью. Десятичные приближения с недостатком и с избытком.

Логические символы (кванторы существования и всеобщности) в математических предложениях. Построение отрицаний с помощью кванторов.

Верхние и нижние грани, ограниченные и неограниченные числовые множества, максимальный и минимальный элементы множества.

Точные грани числовых множеств. Теорема о существовании точных граней непустого ограниченного числового множества. Арифметические операции над вещественными числами.

Геометрическое изображение вещественных чисел точками с помощью координатной прямой. Некоторые числовые неравенства: $|a \pm b| \le |a| + |b|$, $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$.

Стандартные числовые множества: интервал, сегмент (отрезок), промежуток, окрестность, ε - окрестность точки, проколотая окрестность, полупрямая, числовая прямая.

Предельные, внутренние, граничные точки числового множества. Открытые и замкнутые множества. Замыкание множества.

III. Числовые последовательности.

Понятие числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные числовые последовательности. Предел последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства бесконечно малых последовательностей, арифметические операции. Теоремы о взаимосвязи между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями. Взаимосвязь бесконечно малых и сходящихся последовательностей. Свойства сходящихся последовательностей: арифметические операции, предельный переход в неравенствах.

Понятие о неопределенностях типа $0/0$, ∞/∞, $\infty\times 0$. Другие типы неопределенностей, примеры. Некоторые специфические методы исследования неопределенностей. Вычисление пределов выражений, содержащих радикалы.

Монотонные последовательности. Необходимое и достаточное условие сходимости монотонной последовательности. Понятие стягивающейся системы сегментов. Теорема, выражающая свойство непрерывности вещественных чисел: существует единственная точка, принадлежащая всем сегментам стягивающейся системы. Замечательный предел: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$. Интерпретация числа e в задаче о сложных процентах.

Понятие подпоследовательности числовой последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Два эквивалентных определения предельной точки числовой последовательности. Свойства множества всех предельных точек ограниченной последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности. Соотношение множества всех верхних граней, точной верхней грани, верхнего предела. Верхний и нижний пределы неограниченных последовательностей.

Фундаментальная последовательность. Ограниченность фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости числовых последовательностей.

IV. Предел и непрерывность функции.

Понятие функции одной переменной. Область определения, область изменения, график функции. Ограниченные и неограниченные функции на промежутке. Примеры функций в различных экономических моделях: производственная функция.

Определение предела функции в точке по Коши (на языке логических формул) и по Гейне (на основе понятия предела последовательности). Геометрическая интерпретация предела функции. Теорема об эквивалентности двух определений предела функции.

Бесконечно малые функции. Арифметические операции над бесконечно малыми функциями: сумма, разность и произведение. Теоремы о пределах функций: арифметические операции. Предельный переход в неравенствах.

Односторонние пределы функции в точке. Связь односторонних пределов с пределом функции в точке. Примеры вычисления односторонних пределов. Предел функции при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$. Связь с пределом соответствующей числовой последовательности.

Бесконечно большие функции, бесконечно большие положительные и отрицательные функции. Бесконечно большие функции при $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$. Соотношение понятий бесконечно большой функции и неограниченной функции.

Непрерывность функции одной переменной в точке. Односторонняя непрерывность справа и слева, связь с непрерывностью в точке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность многочлена и дробно-рациональной функции.

Понятие сложной функции. Теоремы о пределе и непрерывности сложной функции.

Непрерывность основных элементарных функций: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$, x^a, a^x, $\log_a x$. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$.

Точки непрерывности и точки разрыва функций. Классификация точек разрыва: точки устранимого разрыва, точки разрыва 1 рода, точки разрыва 2 рода.

Сравнение бесконечно малых функций. Сравнение ограниченных и бесконечно больших функций в точке. Эквивалентные функции. Символы “о-малое” и “О-большое”. Асимптотические формулы для элементарных функций при $x\to 0$:

$\sin x = x+o(x)$, $\cos x = 1-x^2/2+o(x^3)$, $\tan x = x+o(x^2)$, $\ln(1+x)=x+o(x)$, $e^x=1+x+o(x)$, $(1+x)^n=1+nx+o(x)$.

Применение асимптотических формул для вычисления пределов функций и для приближенного вычисления значения функций.

V. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Теоремы о локальной ограниченности и об устойчивости знака непрерывной функции в точке. Ограниченность непрерывной на сегменте функции (первая теорема Вейерштрасса). Точные грани функции одной переменной. Достижение непрерывной на сегменте функцией своих точных верхней и нижней граней (вторая теорема Вейерштрасса). Теорема о прохождении непрерывной на сегменте функции через любое промежуточное значение. Существование корня непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах сегмента.

Понятие обратной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции. Непрерывность обратных тригонометрических функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$. Графики.

VI. Производные и дифференциалы.

Определение производной функции, ее физический и геометрический смысл. Экономический смысл производной на примере производной функции затрат. Таблица производных элементарных функций. Односторонние производные и их связь с производной функции в точке.

Правила вычисления производной суммы, произведения и отношения двух функций. Производные функций $\tan x$, $\cot x$. Теорема о производной обратной функции и ее геометрическая интерпретация. Производные функций $\arcsin x$, $\arctan x$. Теорема о производной сложной функции. Производная степенной и показательной функций.

Понятие функции, заданной параметрически. Формула производной функции, заданной параметрически.

Понятие вектор-функции. Годограф вектор-функции. Предел вектор-функции. Производная вектор-функции и ее геометрический смысл. Связь производной вектор-функции с производными скалярных функций - ее координат. Правила дифференцирования вектор-функции.

Определения дифференцируемости и дифференциала функции в точке. Геометрический смысл дифференциала. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Связь дифференцируемости и непрерывности функции в точке. Пример непрерывной, но недифференцируемой функции в точке. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила вычисления дифференциала суммы, произведения и отношения двух функций.

Использование дифференциала для приближенных вычислений. Формула малых приращений. Приближенное вычисление сложных процентов.

Производные и дифференциалы высших порядков. Определение производной n-го порядка. Экономический смысл второй производной на примере зависимости объема выпуска продукции от затрат труда. Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций. Производные n-го порядка функций x^a, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы второго дифференциала.

VII. Теоремы о дифференцируемых функциях.

Возрастание и убывание функции в точке. Достаточные условия возрастания функции в точке. Пример, показывающий, что положительность производной в точке не является необходимым условием возрастания функции в этой точке.

Понятие локального экстремума функции. Теорема Ферма: необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля и ее геометрическая интерпретация. Теорема Лагранжа, ее геометрический и экономический смысл. Следствия из теоремы Лагранжа: условие постоянства функции на промежутке, признак монотонности функции на промежутке. Формула Коши.

Правило Лопиталя: раскрытие неопределенностей типа $0/0$. Правило Лопиталя для случая, когда $x \to \infty$. Правило Лопиталя для неопределенности типа ∞/∞.

Многочлен Тейлора, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Остаточный член в форме Лагранжа. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений элементарных функций. Формула Маклорена. Разложение по формуле Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$ и их применение. Вычисление сложных процентов с высокой точностью.

VIII. Исследование поведения функции и построение графиков.

Возрастающие и убывающие функции. Отыскание промежутков монотонности функции методом исследования знака первой производной. Точки локального экстремума. Точки возможного экстремума функции. Достаточные условия локального экстремума, основанные на исследовании первых и вторых производных.

Понятие направления выпуклости графика функции на данном интервале. Теорема о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале. Геометрическая интерпретация этой теоремы.

Определение точек перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции. Пример, показывающий, что условие $f''(x_0) = 0$ не является достаточным условием перегиба дважды дифференцируемой функции. Точки возможного перегиба графика функции. Различные формы достаточных условий перегиба, использующие первые, вторые, третьи производные.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

Схема исследования графика функции. Примеры исследования по этой схеме.

Построение графиков параметрических функций.

IX. Неопределенный интеграл.

Понятие первообразной функции одной переменной на промежутке. Теорема о том, что любые две первообразных для данной функции отличаются на константу. Неопределенный интеграл - совокупность всех первообразных заданной функции на заданном промежутке. Основные свойства неопределенных интегралов.

Интегрирование методом замены переменной. Интегрирование по частям. Таблица основных неопределенных интегралов.

Понятие о рациональной функции. Выделение целой и дробной частей. Деление многочленов столбиком. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Практические приемы нахождения коэффициентов разложения. Четыре вида простейших дробей и их интегрирование.

Интегрирование рациональных функций от $\sin x$ и $\cos x$ с помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, сведение к интегралу от рациональной функции переменной t.

X. Определенный интеграл

Определенный интеграл как обобщение понятия площади плоской фигуры. Интегральные суммы, разбиение сегмента, выборка. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Неинтегрируемость неограниченных функций. Пример ограниченной неинтегрируемой функции. Верхняя и нижняя интегральные суммы и их геометрическая интерпретация. Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции на сегменте. Некоторые классы интегрируемых на сегменте функций: непрерывные функции, кусочно-непрерывные функции, монотонные ограниченные функции.

Свойства определенного интеграла. Формулы среднего значения. Существование первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Геометрические приложения определенного интеграла.

B. Функции многих переменных

XI. Понятие m-мерного координатного пространства

Евклидово m-мерное координатное пространство. Векторы на плоскости и в пространстве. Операции над векторами: сложение и умножение на число. Скалярное произведение, угол между векторами. Условие ортогональности векторов. Векторное произведение. Условия коллинеарности и компланарности векторов в пространстве. Понятие нормы вектора. Евклидова норма, октаэдрическая и кубическая нормы. Эквивалентность норм. Множества точек в m-мерном евклидовом пространстве: шар, сфера, параллелепипед. Окрестность точки, проколотая окрестность. Шаровая, прямоугольная и кубическая окрестности.

Внутренние и граничные точки множества, предельные точки, изолированные точки. Открытые, замкнутые, ограниченные и неограниченные множества на плоскости и в пространстве.

Связные и несвязные множества. Замыкание множества в пространстве. Выпуклые и невыпуклые множества в пространстве. Выпуклая оболочка множества точек на плоскости. Расстояние от точки до множества, расстояние между множествами.

Последовательность точек в конечномерном евклидовом пространстве. Предел последовательности, предельные точки. Связь между сходимостью последовательности точек и покоординатной сходимостью.

XII. Предел и непрерывность функции многих переменных

Понятие функции многих переменных (ФМП). Способы визуализации. Карта линий равного уровня. Два определения предела функции в точке (по Коши и по Гейне), их эквивалентность. Теорема об арифметических операциях над функциями, имеющими предел в данной точке. Непрерывность функции многих переменных по совокупности переменных и по каждой переменной, связь между ними. Теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями.

Повторные пределы.

Понятие сложной функции. Теорема о непрерывности сложной функции.

XIII. Дифференцируемые функции многих переменных

Частные производные ФМП. Геометрический смысл частной производной.

Понятие дифференцируемости ФМП. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке. Теорема о достаточных условиях дифференцируемости функции. Дифференциал функции нескольких переменных.

Понятие касательной плоскости. Существование касательной плоскости у графика дифференцируемой функции двух переменных. Геометрический смысл дифференцируемости функции двух переменных. Уравнение касательной плоскости.

Частные производные и дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Формулы вычисления дифференциала суммы, произведения и отношения сложных функций.

Линии и поверхности уровня. Понятие производной по направлению и градиента. Соотношение направлений градиента и линии равного уровня для дифференцируемой функции в заданной точке. Геометрический смысл градиента функции в точке.

Теорема о существовании производной по направлению дифференцируемой ФМП. Алгоритм поиска экстремума функции двух переменных градиентным методом.

Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Дифференциал второго порядка. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы дифференциалов высших порядков сложной функции на примере второго дифференциала.

Векторно-матричная форма записи первого и второго дифференциалов ФМП. Матрица Гессе.

Формула Тейлора. Приближенное вычисление значений функции. Геометрический смысл формулы Тейлора с остаточным членом первого, второго, третьего порядков.

XIV. Локальный экстремум функции многих переменных

Понятие локального экстремума ФМП. Необходимое условие локального экстремума. Понятие квадратичной формы и ее матрицы. Понятие знакоопределенности квадратичной формы. Критерий Сильвестра. Теорема о достаточном условии экстремума функции многих переменных.

Геометрическое исследование локального экстремума. Особенности графика и карты линий равного уровня дважды дифференцируемой функции в окрестности точки локального экстремума.

Понятие о методе сопряженных градиентов для поиска локального экстремума.

XV. Неявные функции

Понятие неявной функции. Теорема о существовании и непрерывности неявной функции, определяемой одним уравнением, заданном в прямоугольнике. Теоремы о дифференцируемой неявной функции, определяемой одним уравнением, заданном в окрестности точки. Формула производных неявной функции.

Теорема о неявных функциях, определяемых системой уравнений. Вычисление частных производных неявных функций, определяемых системой уравнений.

Зависимость функций. Достаточное условие независимости функций - отличие от нуля функционального определителя. Общая теорема о зависимости и независимости совокупности функций. Примеры зависимых и независимых функций.

XVI. Условный экстремум

Понятие условного экстремума. Метод Лагранжа и его геометрическая интерпретация. Необходимое условие условного экстремума. Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа. Метод исключения переменных: сведение задачи об условном экстремуме к задаче о безусловном экстремуме. Метод окаймленного гессиана для исследования достаточных условий условного экстремума.

XVII. Векторные функции многих переменных

Понятие векторной функции многих переменных. Матрица Якоби и якобиан. Дифференцирование сложных векторных функций. Векторно-матричная форма записи первого дифференциала.

Отображения, задаваемые простейшими векторными функциями и их геометрическая интерпретация. Функции размерности 2 и 3 от двух и трех переменных. Геометрическая интерпретация якобиана. Понятия однозначного и однолистного отображения. Понятие конформного отображения. Необходимые условия конформности. Достаточные условия.

Теорема о неявной векторной функции. Теорема об обратной векторной функции.

XVIII. Кратные интегралы

Понятие двойного интеграла и основные его свойства. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан. Понятие и свойства тройного интеграла.

Двойной несобственный интеграл. Вычисление методом повторного интегрирования в декартовой и полярной системах координат. Понятие о нормальном распределении. Функция распределения и плотность. Вывод формулы и вычисление моментов одномерного нормального распределения. Нормальное распределение на плоскости. Вычисление моментов плотности двумерного нормального распределения.

C. Несобственные интегралы и ряды.

XIX. Несобственные интегралы функции одной переменной

Несобственный интеграл - обобщение понятия площади для неограниченных плоских областей. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Формулы интегрального исчисления: замена переменной, интегрирование по частям.

Сходимость и расходимость эталонных интегралов $\int_1^\infty x^a dx$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$ и $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^a}$ при различных значений a. Признаки сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Предельный признак сравнения. Примеры сходящихся и расходящихся несобственных интегралов.

Критерий Коши. Абсолютно сходящиеся и условно сходящиеся несобственные интегралы. Признак сходимости Дирихле-Абеля.

XX. Интегралы, зависящие от параметра.

Собственные интегралы, зависящие от параметра. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Основные операции: предельный переход, дифференцирование и интегрирование по параметру. Достаточные условия корректности этих операций. Вычисление несобственных интегралов методом дифференцирования по параметру. Вычисление моментов случайной величины с нормальным распределением методом дифференцирования по параметру. Вычисление средних значений некоторых элементарных функций от случайной величины с нормальным распределением. Понятие об интеграле Фурье.

XXI. Числовые ряды

Числовой ряд и его основные элементы: общий член, частичная сумма, остаток. Сходимость и свойства сходящихся рядов. Арифметические операции с числовыми рядами. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши. Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: интегральный признак, признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ при различных значениях a.

Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды, признак сходимости Лейбница. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^a}$. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Перестановка членов абсолютно и условно сходящихся рядов.

Признаки Дирихле и Абеля. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin ak}{k^b}$ при различных значениях a и b.

XXII. Функциональные ряды.

Понятие функционального ряда. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Область сходимости, радиус сходимости и формула для его вычисления. Почленное дифференцирование степенного ряда. Вычисление суммы степенного ряда методом дифференцирования и интегрирования по параметру. Степенные ряды, порожденные геометрической прогрессией. Ряды Тейлора для экспоненциальной, логарифмической функции. Разложение в ряд Тейлора тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Приближенные вычисления с помощью степенных рядов.

XXIII. Основная литература

1. Н. Натансон. Курс высшей математики. Москва, 1999.

2. М.С.Красс. Математика для экономических специальностей. Москва, 1999.

3. В.А.Болгов, Б.П. Демидович, А.В.Ефимов. Сборник задач по математике для высших технических учебных заведений. М.: Наука, 1993.

4. Общий курс высшей математики для экономистов. Под ред. В.И.Ермакова, 1999.

5. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш.Кремера, 1997.

Автор программы: А.А.Быков